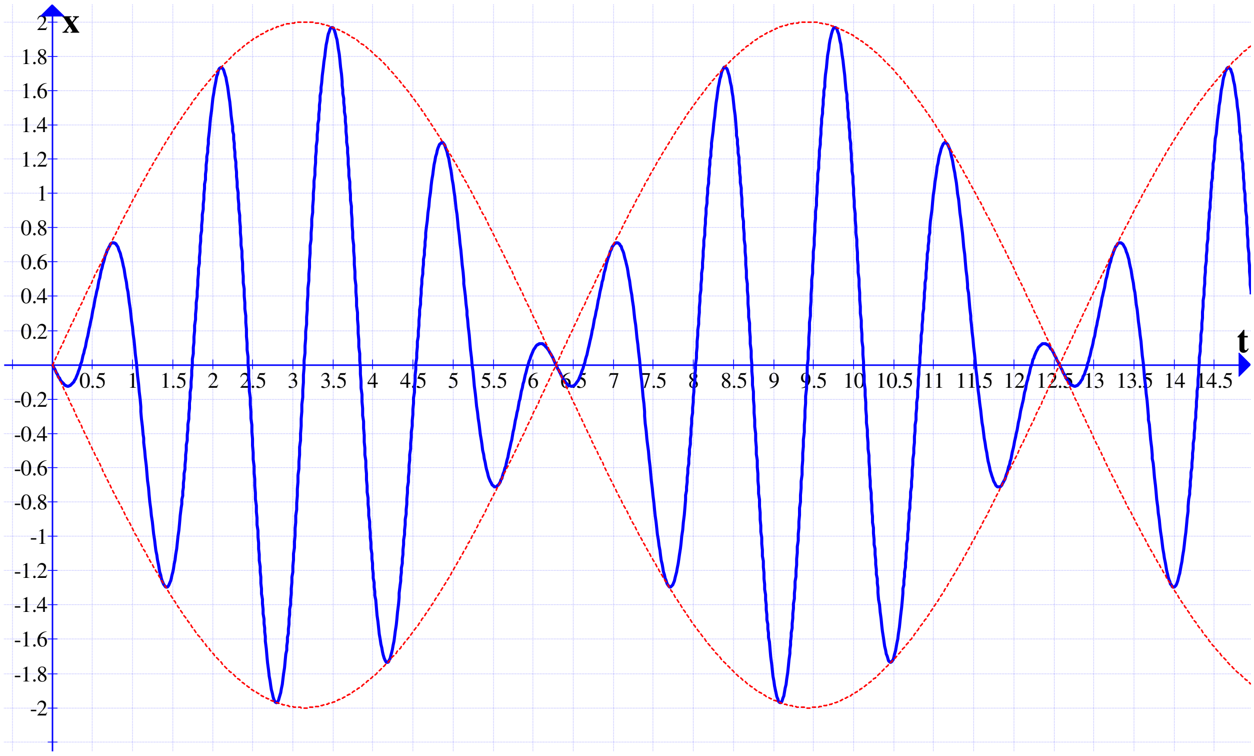
Διακροτήματα και εξαναγκασμένη ταλάντωση.

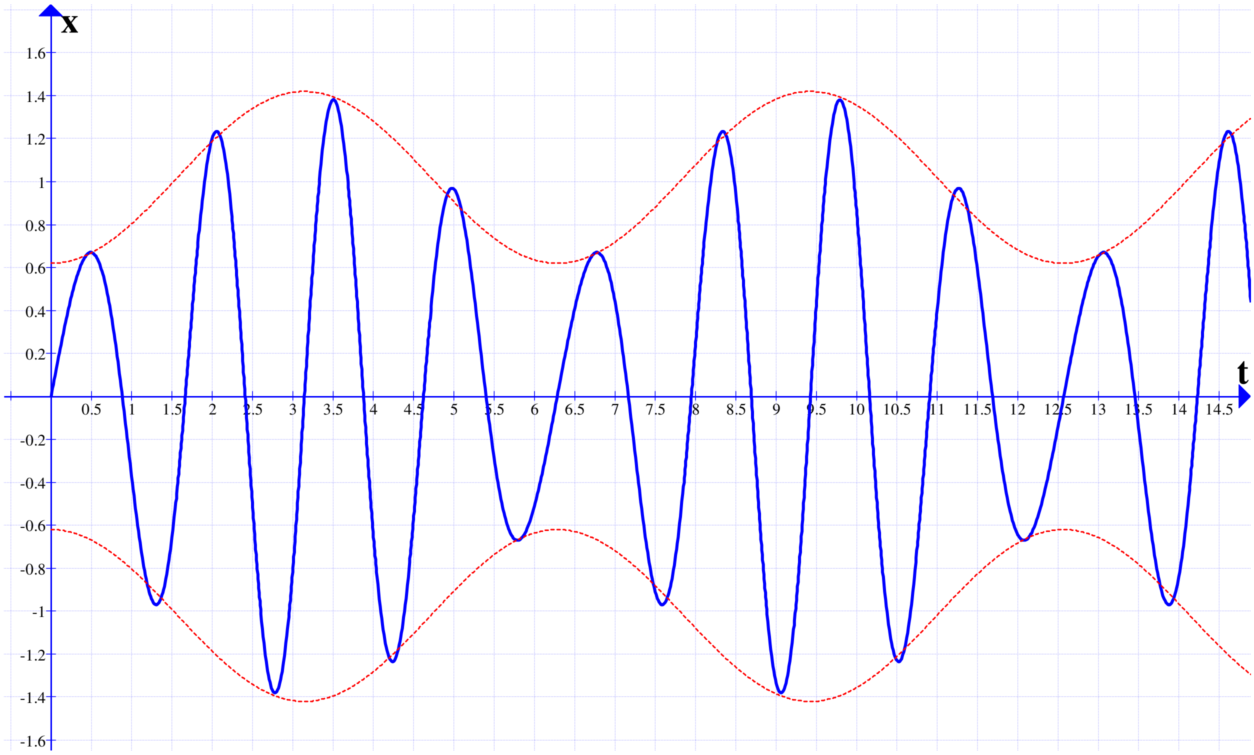
Ο όρος $x = \eta\mu 4t - \eta\mu 5t$ μας είναι οικείος.



Ένα διακρότημα. Η περιβάλλουσα μηδενίζεται με κάθε $\dfrac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = 6,28s$.

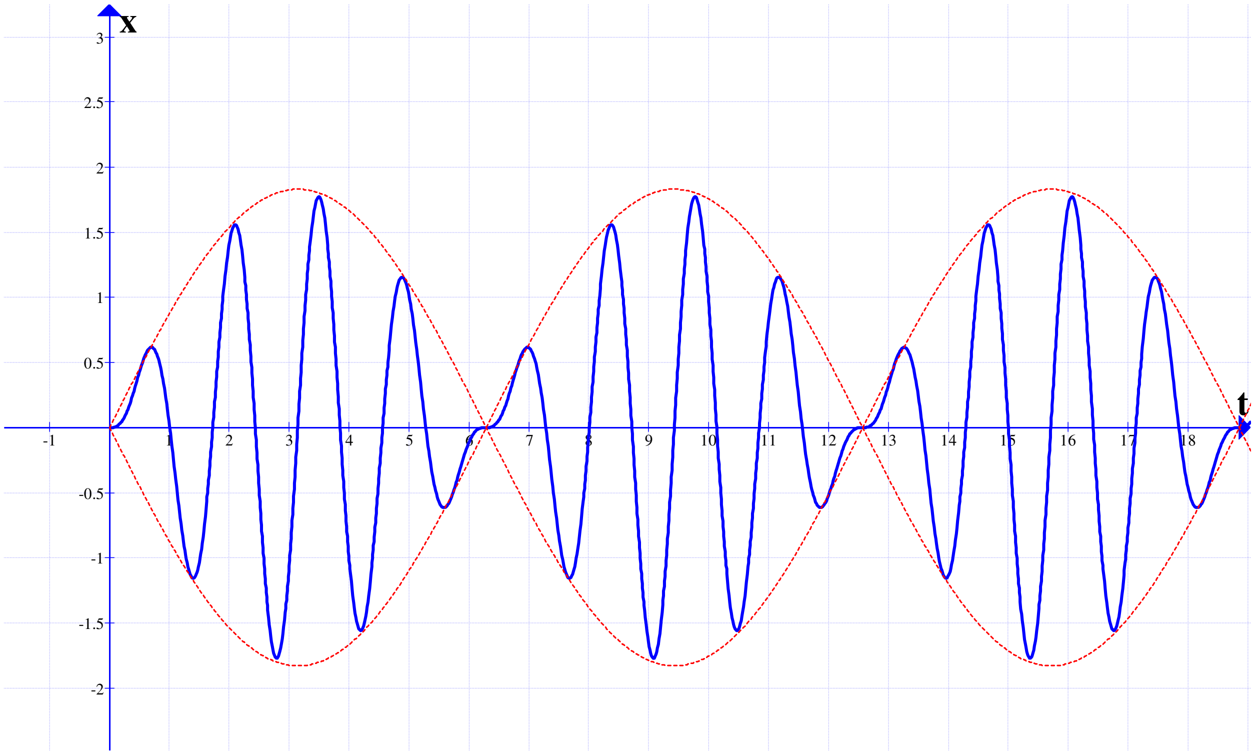
Την στιγμή που μηδενίζεται η περιβάλλουσα η ταχύτητα δεν είναι μηδενική.

Αν οι συντελεστές διέφεραν, η εικόνα θα ήταν διαφορετική.
Η $x = \eta\mu 4t - 0,4 \cdot \eta\mu 5t$:



Σκότωσα φυσικά την περιβάλλουσα. Την προσέγγισα χωρίς να την χαράξω με ακρίβεια, αλλά καταλαβαίνουμε ότι δεν μηδενίζεται.

Ας δούμε την $x = \eta\mu 4t - \frac{4}{5}\cdot \eta\mu 5t$.



Έχουμε πάλι μηδενισμό της περιβάλλουσας.
Την στιγμή μηδενισμού της περιβάλλουσας ποια είναι η ταχύτητα;

$$\frac{dx}{dt} = 4\cdot \sigma\upsilon\nu 4t - \frac{4}{5}\cdot 5\cdot \sigma\upsilon\nu 5t = 4\cdot\left(\sigma\upsilon\nu 4t - \sigma\upsilon\nu 5t\right)$$

Την στιγμή $t = 2\pi s$ ο όρος γίνεται:

$$\frac{dx}{dt} = 4\cdot\left(\sigma\upsilon\nu 4t - \sigma\upsilon\nu 5t\right) = 4\cdot\left(\sigma\upsilon\nu 8\pi - \sigma\upsilon\nu 10\pi\right) = 0$$

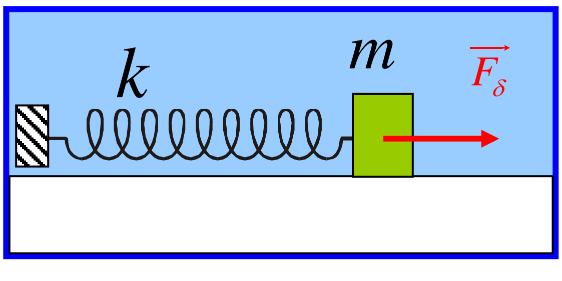
Μηδενική δηλαδή ταχύτητα.
Την ίδια στιγμή η θέση:

$$x = \eta\mu 4t - \frac{4}{5}\cdot \eta\mu 5t = \eta\mu 8\pi - \frac{4}{5}\cdot \eta\mu 10\pi = 0 - 0 = 0$$

Αυτό εξηγεί τον μηδενισμό της περιβάλλουσας και ταυτόχρονα της ταχύτητας στις ίδιες χρονικές στιγμές.

Θεωρούσα ότι μηδενισμό της περιβάλλουσας έχουμε μόνο όταν τα πλάτη των συνιστωσών του διακροτήματος είναι ίσα. Έτσι μου έκανε εντύπωση το ότι, σε πειράματα επίδειξης συντονισμού, το σώμα ηρεμούσε στιγμιαία και ξανάρχιζε να κινείται.
Ας δούμε τις εξαναγκασμένες χωρίς απόσβεση, από την αρχή.
Αρχικά ορθόδοξα, με χρήση διαφορικής εξίσωσης.
Ακολουθώ την τεχνική του Θρασύβουλου, με την συνδρομή του συνημιτόνου αντί της φ_o.

Εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς απόσβεση.



Περίπτωση 1η .
Το, αρχικά ακίνητο, σώμα δέχεται περιοδική δύναμη $F_\delta = F_o \cdot \eta\mu\omega t$.
Θα βρούμε την εξίσωση θέσης του.

Λύση:

Φυσικά $\sum F = m \cdot a$

$$\Rightarrow -k\cdot x + F_o \cdot \eta\mu\omega t = m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\cdot x = \frac{F_o}{m}\cdot\eta\mu\omega t$$

Ακολουθώ τα βήματα του Θρασύβουλου (σχεδόν).

(Θέματα Φυσικής. Παρανοήσεις και προτάσεις υπέρβασής τους.)

Μια μερική λύση είναι η $x = B\cdot\eta\mu\omega t$.

Πρέπει όμως:

$$-B\cdot\omega^2\cdot\eta\mu\omega t + \frac{k}{m}\cdot B\cdot\omega^2\cdot\eta\mu\omega t = \frac{F_o}{m}\cdot\eta\mu\omega t \Rightarrow B = \frac{F_o}{k - m\cdot\omega^2}$$

Δηλαδή η μερική λύση είναι:

$$x = \frac{F_o}{m\cdot\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}\cdot\eta\mu\omega t$$

Η γενική λύση της ομογενούς είναι $x = C\cdot\eta\mu\omega_o t + D\cdot\sigma\upsilon\nu\omega_o t$

Προσθέτουμε τις δύο λύσεις και έχουμε την λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$x = C\cdot\eta\mu\omega_o t + D\cdot\sigma\upsilon\nu\omega_o t + \frac{F_o}{m\cdot\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}\cdot\eta\mu\omega t$$

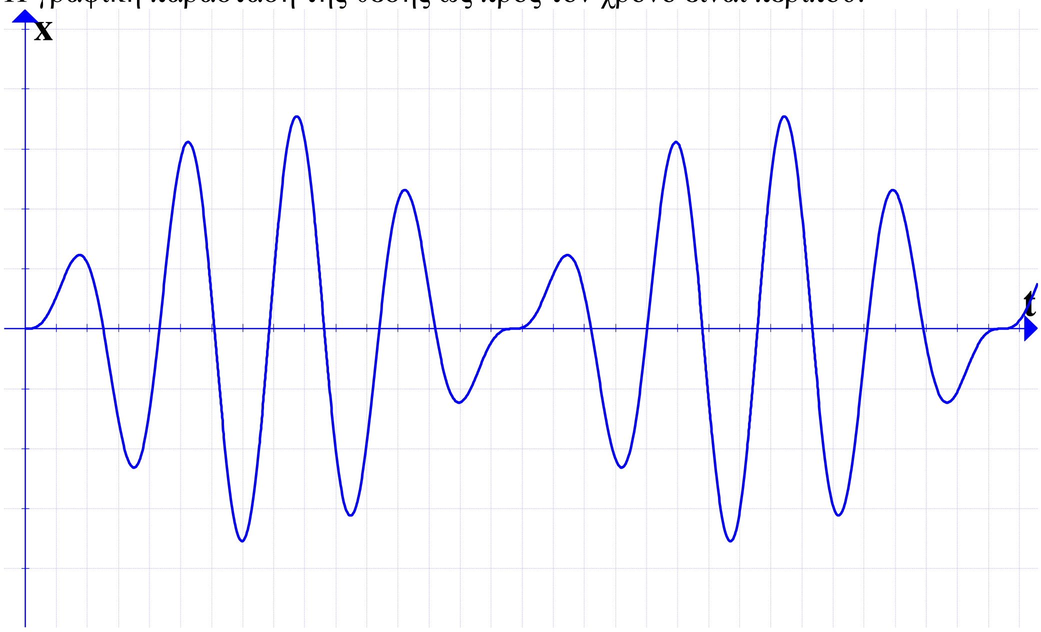
Έχουμε όμως ότι αρχικά $x = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow x = C\cdot\eta\mu\omega_o t + \dfrac{F_o}{m\cdot\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}\cdot\eta\mu\omega t$

Επίσης αρχικά $\dfrac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \omega_o\cdot C + \dfrac{F_o\cdot\omega}{m\cdot\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)} = 0 \Rightarrow C = -\dfrac{F_o}{m\cdot\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}\cdot\dfrac{\omega}{\omega_o}$

Τότε:

$$x = \frac{F_o}{m\cdot\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}\cdot\left(\eta\mu\omega t - \frac{\omega}{\omega_o}\cdot\eta\mu\omega_o t\right)$$

Η γραφική παράσταση της θέσης ως προς τον χρόνο είναι περίπου:



Εδώ οι συνιστώσες δεν έχουν ίδια πλάτη. Θα περίμενε κάποιος να μην μηδενίζεται η περιβάλλουσα. Όμως οι συντελεστές έχουν λόγο ω/ω_o. Έτσι η πρώτη παράγωγος:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_o}{m\cdot\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}\cdot\left(\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t - \frac{\omega}{\omega_o}\cdot\omega_o\cdot\sigma\upsilon\nu\omega_o t\right) = \frac{F_o\cdot\omega}{m\cdot\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\omega t - \sigma\upsilon\nu\omega_o t\right)$$

Την στιγμή μηδενισμού της περιβάλλουσας:

$$\omega \cdot t = \omega \cdot \frac{2\pi}{|\omega-\omega_o|} \quad \text{και} \quad \omega_o \cdot t = \omega_o \cdot \frac{2\pi}{|\omega-\omega_o|}$$

Χωρίς να μπλέξουμε με πολλά Μαθηματικά, ας υποθέσουμε ότι οι δύο κυκλικές συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια της διαφοράς τους.

Έστω π.χ. $\omega = 4 \, {}^{rad}\!/_{s}$, $\omega_o = 5 \, {}^{rad}\!/_{s}$ και $\omega_o - \omega = 1 \, {}^{rad}\!/_{s}$

Τότε την στιγμή μηδενισμού της περιβάλλουσας $\omega \cdot t = 8\pi$ και $\omega_o \cdot t = 10\pi$.

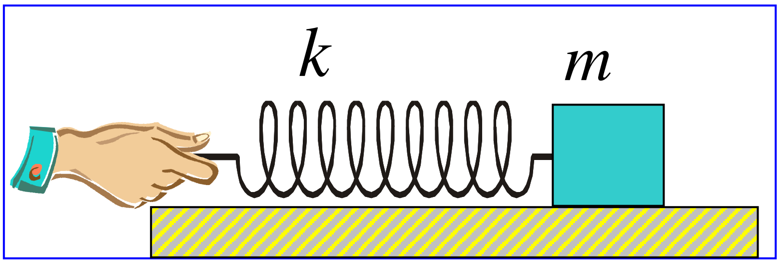
Δηλαδή:

$$x = \frac{F_o}{m \cdot \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)} \cdot \left(\eta\mu 8\pi - \frac{\omega}{\omega_o} \cdot \eta\mu 10\pi \right) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{F_o \cdot \omega}{m \cdot \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)} \cdot \left(\sigma\upsilon\nu 8\pi - \sigma\upsilon\nu 10\pi\right) = 0$$

Κάθε πραγματική περίπτωση, στην οποία δεν συμβαίνει το ανωτέρω με τον κοινό διαιρέτη, προσεγγίζεται από την παραπάνω. Δηλαδή βλέπουμε σχεδόν μηδενισμό «πλάτους» και ταχύτητας του διακροτήματος. Δεν μπορούμε να αντιληφθούμε την διαφορά οπτικά. Ένας καταγραφέας θέσης δεν θα έδινε ριζικά διαφορετική εικόνα από την προηγούμενη.

Η ρεαλιστική περίπτωση:

Αν θέλουμε να εκτελέσουμε ένα πείραμα επίδειξης συντονισμού, πρέπει να ασκήσουμε περιοδική δύναμη στο σώμα.
Πως όμως θα στήσουμε τέτοιον μηχανισμό;
Δεν είναι εύκολο το να ασκούμε δύναμη κάπου, είναι όμως εύκολο να κινούμε κάτι με την επιθυμητή εξίσωση θέσης.



Έτσι ένας μηχανισμός, που παριστάνεται με ένα χέρι, ταλαντεύεται με όποια (σχεδόν) εξίσωση θέλουμε. Θα θέσουμε λ.χ. την άκρη του ελατηρίου σε ταλάντωση:
$y = B \cdot \eta\mu\omega t$

Η μόνη δύναμη που δέχεται το σώμα είναι αυτή του ελατηρίου.

$$F = -k(x-y)$$

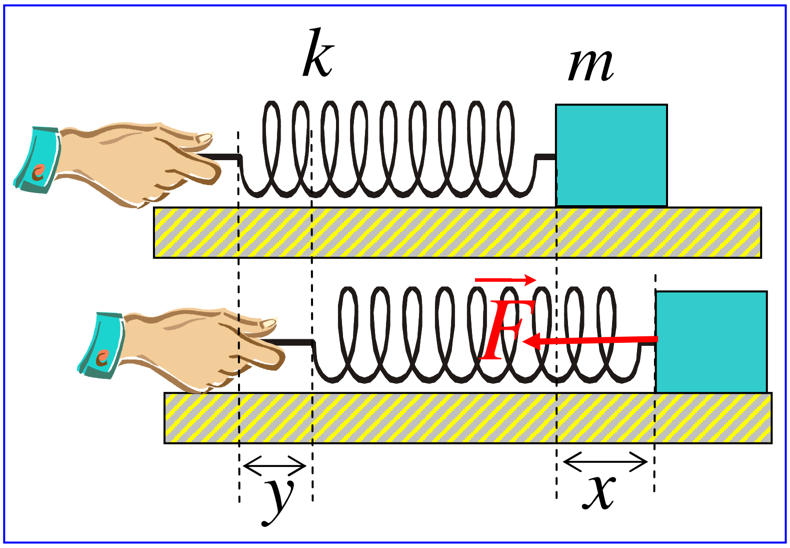
$$\Rightarrow m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = k \cdot B \cdot \eta\mu\omega t$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{k \cdot B}{m} \cdot \eta\mu\omega t$$

Αν ονομάσουμε $F_o = k \cdot B$ τότε:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{F_o}{m} \cdot \eta\mu\omega t$$

Έχουμε δηλαδή την ίδια περίπτωση.



Η λύση είναι η προηγούμενη:

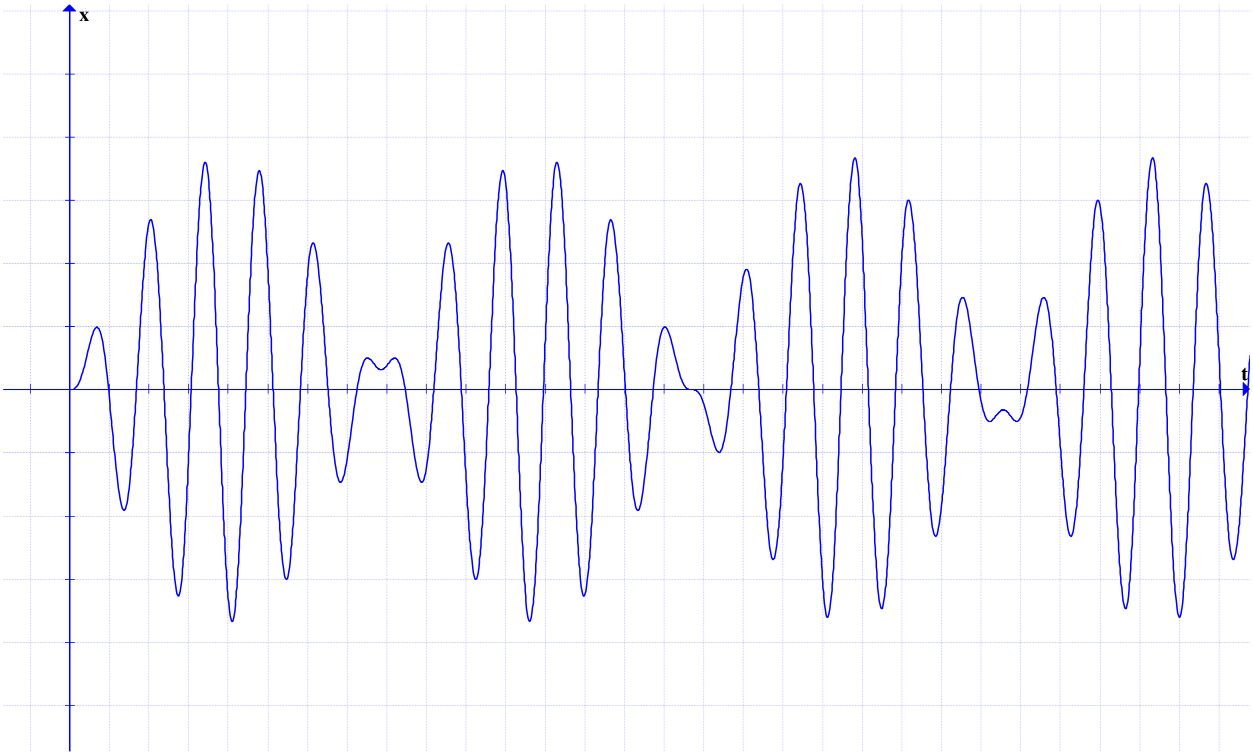
$$x = \frac{F_o}{m \cdot \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)} \cdot \left(\eta\mu\omega t - \frac{\omega}{\omega_o} \cdot \eta\mu\omega_o t \right) = \frac{k \cdot B}{m \cdot \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)} \cdot \left(\eta\mu\omega t - \frac{\omega}{\omega_o} \cdot \eta\mu\omega_o t \right)$$

Εμφανίζεται πάλι το διακρότημα που είδαμε και πριν.

Σε ένα πείραμα επίδειξης ο εκτελών το πείραμα θέλει θεαματικότητα. Είναι και λίγο σόουμαν εκείνη την στιγμή. Το πείραμα θα κρατήσει ίσως 10 λεπτά. Δεν ρισκάρει κάτι άχαρο. Θα βάλει επομένως συχνότητα διεγέρτη κοντά στην ιδιοσυχνότητα.

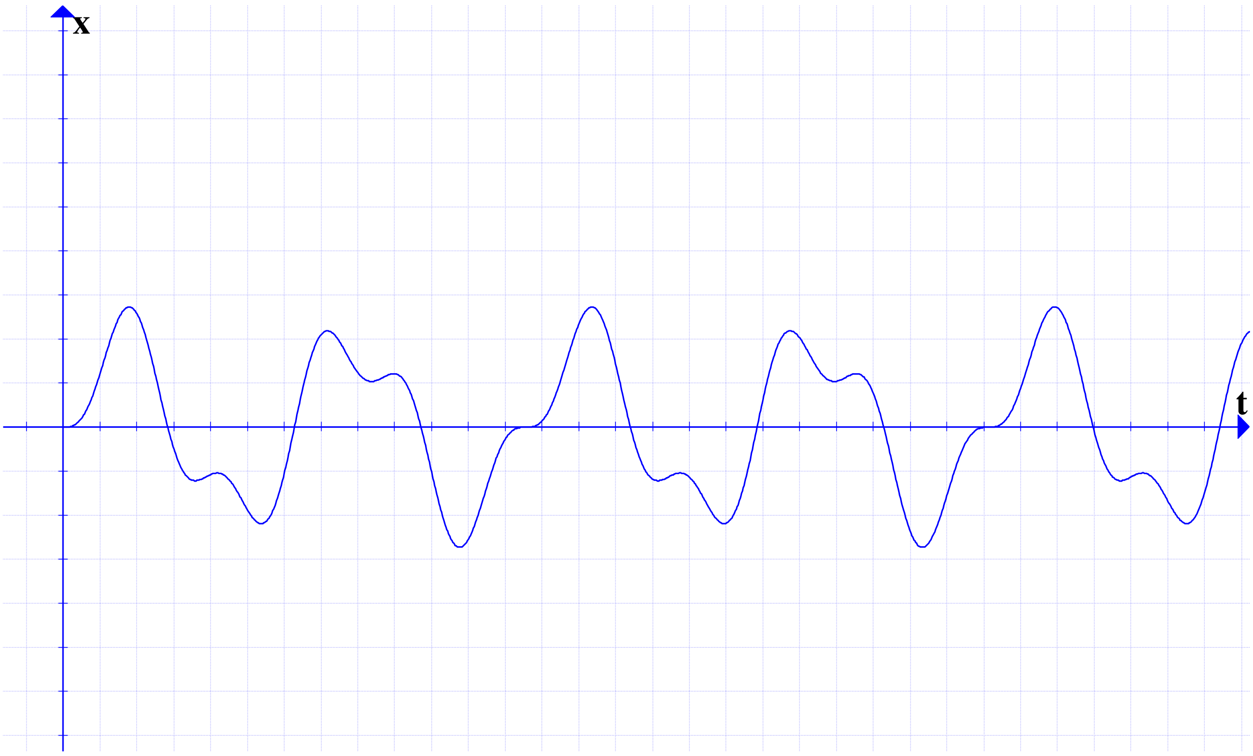
Μακάρι αν $\omega_o = 5\,{}^{rad}\!/\!_{s}$ να έβαζε $\omega = 4\,{}^{rad}\!/\!_{s}$.

Δεν θα τα καταφέρει ίσως και θα βάλει $\omega = 4,2\,{}^{rad}\!/\!_{s}$. Το αποτέλεσμα:



Ποιος ξεχωρίζει με το μάτι την διαφορά από το προηγούμενο;

Αν φυσικά έβαζε $\omega = 2\,{}^{rad}\!/\!_{s}$:



Θα είχαμε ένα άχαρο πείραμα. Θα βλέπαμε μια πάνω-κάτω κίνηση χωρίς το θεαματικόν του διακροτήματος.