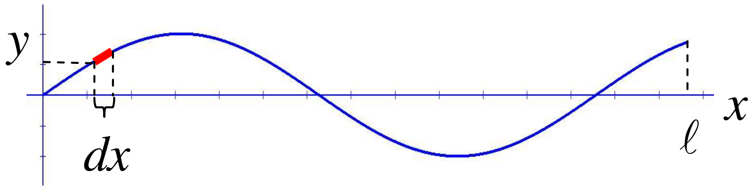
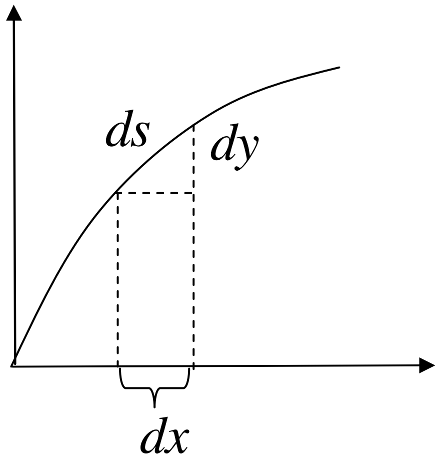
Ενέργεια ενός τμήματος χορδής.



Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται σε μια χορδή. Πόση ενέργεια έχει κάθε στιγμή ένα τμήμα της.



Το τμηματίδιον της χορδής έχει επιμηκυνθεί κατά:

$$ds - dx = \sqrt{dx^2 + dy^2} - dx = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - dx$$

Επειδή το κύμα είναι νορμάλ και όχι σαν αυτό των πρόσφατων Πανελλαδικών, έχουμε ότι $\frac{dy}{dx} << 1$.

Τότε η επιμήκυνση γράφεται:

$$d\ell = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - dx \approx dx\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] - dx = \frac{dx}{2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Η δυναμική ενέργεια του τμηματιδίου είναι όσο το έργο που παρήγαγε επ' αυτού η τάση της χορδής:

$$dU = F \cdot d\ell = \mu \cdot \upsilon^2 \cdot d\ell = \mu \cdot \upsilon^2 \cdot \frac{dx}{2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2}dm \cdot \upsilon^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}dm \cdot \upsilon^2 \cdot \left(\frac{d\left[A \cdot \eta\mu\left(\omega t - \omega \cdot \frac{x}{\upsilon}\right)\right]}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}dm \cdot \upsilon^2 \cdot A^2 \cdot \left[-\frac{\omega}{\upsilon}\sigma\upsilon\nu\left(\omega t - \omega \cdot \frac{x}{\upsilon}\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}dm \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\left(\omega t - \omega\frac{x}{\upsilon}\right) = \frac{1}{2}dm \cdot u^2 = dK$$

Η ενέργεια του στοιχειώδους τμήματος της χορδής είναι :

$$dE = 2dK = dm \cdot \upsilon^2 = \mu \cdot dx \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda}\right)$$

, όπου μ η γραμμική πυκνότητα.

Η ενέργεια που έχει την στιγμή t το τμήμα αυτό προκύπτει με ολοκλήρωση:

$$E = \mu \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda}\right) \cdot dx = \frac{\mu \cdot \omega^2 \cdot A^2}{2} \cdot \int_{x_1}^{x_2}\left[1 + \sigma\upsilon\nu 4\pi\left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \cdot dx$$

$$= \frac{\mu \cdot \omega^2 \cdot A^2}{2} \cdot \left(x_2 - x_1\right) + \frac{\mu \cdot \omega^2 \cdot A^2}{2} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sigma\upsilon\nu 4\pi\left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda}\right) \cdot dx =$$

$$= \frac{\mu \cdot \omega^2 \cdot A^2}{2} \cdot \ell - \frac{\lambda.\mu \cdot \omega^2 \cdot A^2}{8\pi} \cdot \left[\eta\mu 4\pi\left(f \cdot t - \frac{x_2}{\lambda}\right) - \eta\mu 4\pi\left(f \cdot t - \frac{x_1}{\lambda}\right)\right] =$$

$$= \frac{\mu \cdot \omega^2 \cdot A^2}{2} \cdot \ell - \frac{\lambda.\mu \cdot \omega^2 \cdot A^2}{4\pi} \cdot \eta\mu 2\pi\frac{\ell}{\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(4\pi f \cdot t - 2\pi\frac{x_2 + x_1}{\lambda}\right)$$

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια του τμήματος μεταβάλλεται περιοδικά.

Εξαίρεση έχουμε στην περίπτωση καθ' ήν $\eta\mu\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\ell=0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\ell=\kappa\cdot\pi \Leftrightarrow \ell=\kappa\cdot\frac{\lambda}{2}$.

Δηλαδή τμήματα που έχουν μήκος ακέραιο πολλαπλάσιο του ημιμήκους κύματος, έχουν σταθερή ενέργεια. Θα λέγαμε πως όση ενέργεια καταφθάνει με το κύμα, τόση αναχωρεί.

Η λύση που κυκλοφορεί είναι δραματικά διαφορετική.
Αποδίδεται στο στοιχειώδες τμήμα ενέργεια ταλάντωσης:

$$dE=\frac{1}{2}dm\cdot\omega^2\cdot A^2=\frac{1}{2}\mu\cdot dx\cdot\omega^2\cdot A^2$$

Αθροίζοντας τις ενέργειες των στοιχειωδών τμημάτων θα έχουμε:

$dE=\frac{1}{2}\mu\cdot\ell\cdot\omega^2\cdot A^2=\frac{1}{2}m\cdot\omega^2\cdot A^2$, όπου m η μάζα του τμήματος της χορδής.

Κάτι τέτοιο σημαίνει φυσικά σταθερότητα ενέργειας και όχι διάδοση ενέργειας.

Οι δύο λύσεις δίνουν ίδιο αποτέλεσμα στην περίπτωση που το μήκος του τμήματος είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του λ/2. Όμως η λογική της ενέργειας ταλάντωσης έχει κάνει ζημιά.
Ονομάσαμε «ενέργεια ταλάντωσης» μια ποσότητα που παραμένει σταθερή.
Ξέρουμε ότι και στα κύματα $\omega^2\cdot y^2+u^2=\omega^2\cdot A^2$. Μας αρκεί για υπολογισμούς ταχύτητας ταλάντωσης (ωκύτητας) ή απομάκρυνσης. Έλα όμως που δεν υπάρχει στο βιβλίο;
Έλα που στα Βαθμολογικά συζητάμε πόσα μόρια θα κόψουμε αν χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη;
Έτσι η σχέση πολλαπλασιάζεται επί $\frac{1}{2}dm$ και το προϊόν βαπτίζεται «ενέργεια ταλάντωσης».
Όμως έτσι χάσαμε το ότι η ενέργεια σε ένα κύμα «ταξιδεύει». Χάσαμε το ότι σε ένα στάσιμο «κύμα» η ενέργεια εγκλωβίζεται μεταξύ δεσμών, παλινδρομούσα γοητευτικώς και περιοδικώς.

Αν το βιβλίο περιείχε την σχέση $\omega^2\cdot y^2+u^2=\omega^2\cdot A^2$ θα είχαμε γλυτώσει πολλά και στις ταλαντώσεις, και στα κύματα. Η μη ύπαρξη της σχέσης ωθεί στην χρήση της $\frac{1}{2}D^2\cdot y^2+\frac{1}{2}m\cdot u^2=\frac{1}{2}D^2\cdot A^2$.
Οι όροι της έχουν διάσταση ενέργειας. Αν δεν πάρεις το όλο θέμα στα σοβαρά δεν έγινε και τίποτα.
Η ανάγκη όμως ασκήσεων γέννησε και θέματα που δίνουν ή ζητούν την «ενέργεια ταλάντωσης».
Έτσι λύνονται ασκήσεις που φτιάχτηκαν για να φτιαχτούν, αλλά προκαλείται σύγχυση σε έννοιες και φαινόμενα.
Έτσι αναγράφονται θέματα που ζητούν ενέργεια στην σύνθεση ταλαντώσεων, χωρίς να συλλαμβάνουμε το περιεχόμενο αυτού που υπολογίσαμε. Αν υπάρχει φυσικά.
Τα κύματα έχουν δυστυχώς την πρωτιά σε αχρηστολογίες (γράφω κόσμια). Αντί να ασχοληθούμε με τα γοητευτικά τους φαινόμενα, ασχολούμαστε με την εξίσωση. Η εξίσωση λόγον ύπαρξης έχει να τα εξηγήσει. Είναι η υπηρετριούλα και όχι η κυρά του σπιτιού. Έτσι βρήκαμε την ευκαιρία να στήνουμε προβλήματα με κλαδικές συναρτήσεις, να εξετάζουμε αν έφτασε το κύμα, να κάνουμε γραφικές παραστάσεις, να μεταμφιέζουμε τριγωνομετρικές ασκήσεις σε ασκήσεις Φυσικής.
Όταν φάνηκαν να εξαντλούνται, μπήκε και η αρχική φάση στο παιγνίδι, με ενίοτε ευτράπελα αποτελεσματα.
-Παιδιά όταν το κύμα έχει αρχική φάση π, βάζουμε φάση του σημείου άφιξης το π και όχι το μηδέν.
Ο Άγιος προστάτης των ασκησιολογούντων, του οποίου το όνομα μου διαφεύγει, μας έχει φυλάξει μέχρι τώρα από «τη στραβή». Σκεφθείτε όμως να συνεχιστούν οι χοροί και τα τραγούδια και να πέσει θέμα:

Κατατάξατε τις δυναμικές ενέργειες σε φθίνουσα σειρά. Οι στοιχειώδεις μάζες στα Α, Β, Γ είναι ίσες.