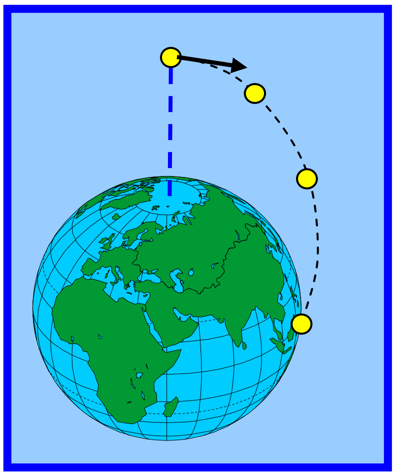
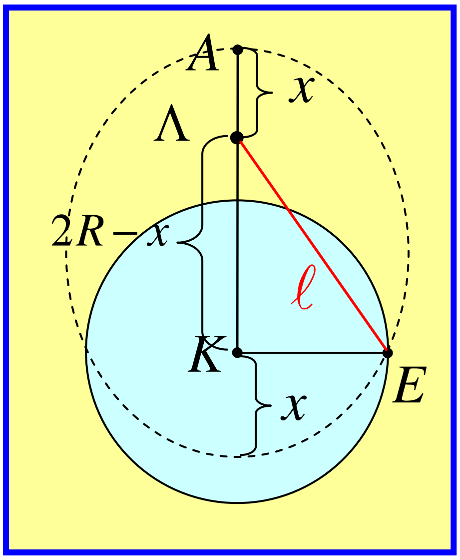
Θέλουμε να βομβαρδίσουμε τον Ισημερινό.



Ένα σώμα βρίσκεται πάνω από τον βόρειο πόλο σε ύψος μιας γήινης ακτίνας.
Με ποια οριζόντια ταχύτητα πρέπει να βληθεί ώστε να φτάσει στον Ισημερινό;
Με ποια ταχύτητα θα φτάσει εκεί;
Με ποια γωνία θα πέσει στο έδαφος.
Ας θεωρήσουμε ότι η γη δεν διαθέτει ατμόσφαιρα.
Δεν μας απασχολεί το αν περιστρέφεται ή όχι.
Θεωρούμε γνωστό το ότι η τροχιά που επιθυμούμε είναι έλλειψη της οποίας η μία εστία είναι το κέντρο της γης.
Ας προσδιορίσουμε την άλλη.

Απάντηση:

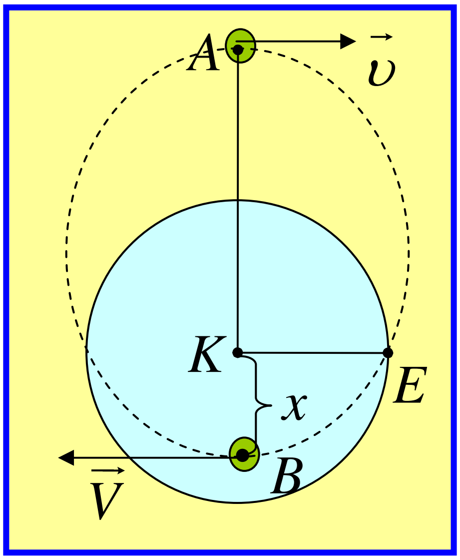


Η έλλειψη τέμνει τη γη. Έχει εστίες τα Κ και Λ.
Ξέρουμε ότι το γνωστό σπαγκάκι με το οποίο γράφουμε ελλείψεις θα περάσει από το Α.
Τότε θα έχει μήκος $2R+x$.
Όταν είμαστε στο Ε το μήκος είναι $R+\ell$.
Εξισώνουμε:
$2R+x=R+\ell$
$\Rightarrow x=\ell-R$
Οπότε η ΚΛ είναι $(K\Lambda)=2R-x=3R-\ell$
Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΚΛΕ:

$$(3R-\ell)^2+R^2=\ell^2 \Rightarrow 9R^2+\ell^2-6R\cdot\ell+R^2=\ell^2 \Rightarrow \ell=\frac{5}{3}R$$

Φυσικά τότε και $x=\ell-R=\dfrac{2}{3}R$

Αφήνω τα γεωμετρικά και πάμε στην Φυσική.



Αν η γη δεν εμπόδιζε το βλήμα και το άφηνε να περάσει μέσα από αυτήν, θα πήγαινε το βλήμα στο Β.
Κατά την κίνηση από το Α στο Β διατηρείται η στροφορμή του βλήματος. Δηλαδή:

$$m\cdot\upsilon\cdot 2R=m\cdot V\cdot\frac{2R}{3}\Rightarrow V=3\upsilon$$

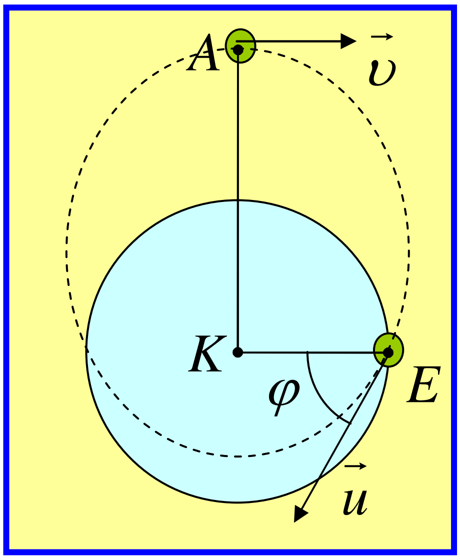
Και η ενέργεια διατηρείται οπότε:

$$-G\frac{M\cdot m}{2R}+\frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2=-G\frac{M\cdot m}{2\,R/3}+\frac{1}{2}m\cdot V^2$$

$$\Rightarrow 2G\frac{M}{R}=8\upsilon^2\Rightarrow \upsilon=\frac{1}{2}\sqrt{G\frac{M}{R}}$$

Με αυτήν επομένως την ταχύτητα πρέπει να βληθεί, αν θέλουμε να βομβαρδίσουμε τον Ισημερινό.

Πάμε τώρα να δούμε τι γίνεται στο σημείο Ε, όπου το βλήμα προσγειώνεται.



Η διατήρηση ενέργειας επιβάλλει:

$$-G\frac{M\cdot m}{2R}+\frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2=-G\frac{M\cdot m}{R}+\frac{1}{2}m\cdot u^2$$

$$\Rightarrow -G\frac{M}{R}+\frac{1}{4}G\frac{M}{R}=-2G\frac{M}{R}+u^2\Rightarrow u=\frac{1}{2}\sqrt{5G\frac{M}{R}}$$

Ως ανεμένετο μεγαλύτερη της υ.

Διατηρείται όμως και η στροφορμή.

$$m\cdot\upsilon\cdot 2R=m\cdot u\cdot R\cdot\eta\mu\varphi\Rightarrow\eta\mu\varphi=\frac{2\upsilon}{u}=\frac{\sqrt{G\frac{M}{R}}}{\frac{1}{2}\sqrt{5G\frac{M}{R}}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Η γωνία είναι περίπου $63,43^o$.

Θα μπορούσαμε να βρούμε τον χρόνο που θέλει το βλήμα να φτάσει εκεί.
Η γη περιστρέφεται και, ξέροντας την διάρκεια του ταξιδιού του βλήματος, θα μπορούσαμε να βρούμε πόσο δυτικότερα έπεσε το βλήμα από το σημείο που σημαδεύαμε.
Μια άλλη φορά.