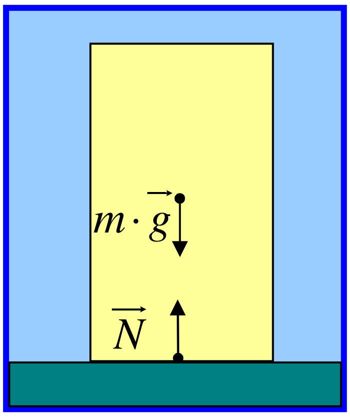
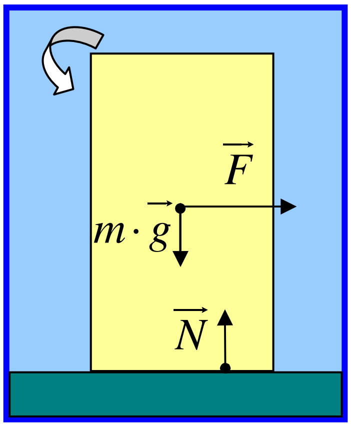
Ο φορέας της Ν.



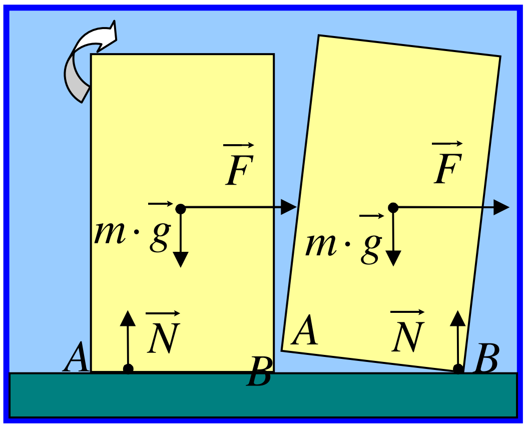
Κύλινδρος σε οριζόντιο επίπεδο ανενόχλητος.

Είναι προφανές το ότι ο κύλινδρος θα ισορροπήσει.
Αν ανατρεπόταν ή εκινείτο ή και τα δύο, προς κάποια κατεύθυνση, θα χαλούσε η συμμετρία του προβλήματος.
Τριβή επομένως δεν υπάρχει.
Η $\vec{N}$ αναλαμβάνοντας την υποχρέωση να «σβήσει» το βάρος είναι και αντίθετη του βάρους και δύναμη με ίδιο φορέα με αυτό.
Θα μπορούσε να μεταφερθεί στο κέντρο μάζας του σώματος χωρίς αυτό να επηρεάσει την μελέτη μας.

Κύλινδρος σε λείο οριζόντιο επίπεδο.



Αν δεν δέχεται δύναμη έχουμε δει το έργο προηγουμένως.
Αν η δύναμη ασκείται στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου, τότε αν η $\vec{N}$ είχε τον φορέα που δείχνει το σχήμα, ο κύλινδρος θα περιστρεφόταν ανθωρολογιακά.
Θα είχαμε ένα εντυπωσιακό παράδοξο. Το κέντρο μάζας να κινείται αντίθετα από την δύναμη που ασκούμε. Αυτό αποκλείεται.

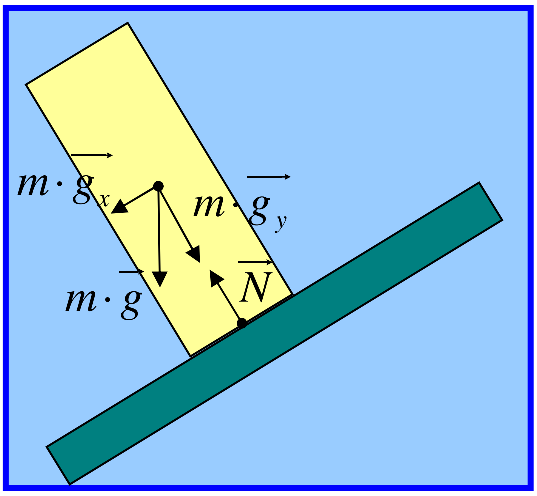


Ας υποθέσουμε ότι ο φορέας της $\vec{N}$ είναι αυτός του νέου σχήματος.
Το βάρος και η $\vec{F}$ δεν έχουν ροπή ως προς το Κ.Μ. Έχει όμως η $\vec{N}$.
Το σώμα περιστρέφεται ωρολογιακά, δηλαδή ανατρέπεται.
Μέχρι εδώ κανένα πρόβλημα. Όμως….
Η $\vec{N}$ μεταφέρεται ακαριαία στο άκρο Β;;
Και πως γίνεται ανατροπή από μια ροπή που υπάρχει στιγμιαία;

Στο κάτω-κάτω μεταφορά της $\vec{N}$ αριστερά σημαίνει πως αυτή θα οδηγηθεί στο άκρο Α και θα έχουμε ανατροπή περί αυτό.

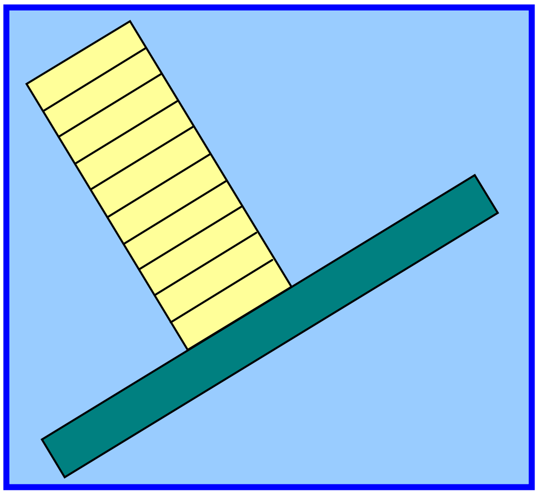
Καταλαβαίνουμε πως η $\vec{N}$ πρέπει να έχει πάλι ίδιο φορέα με το βάρος.

Κύλινδρος σε λείο κεκλιμένο επίπεδο.
Η ιστορία αυτή ισοδυναμεί με κύλινδρο σε λείο οριζόντιο επίπεδο που έχει βάρος $m\cdot\vec{g_y}$ και δέχεται οριζόντια δύναμη $m\cdot\vec{g_x}$.



Σύμφωνα με τα προηγούμενα η $\vec{N}$ θα έχει φορέα διερχόμενο από το κέντρο μάζας. Η συνολική ροπή περί το κέντρο μάζας θα είναι μηδενική και η κίνηση θα είναι μεταφορική. Δηλαδή ο κύλινδρος δεν θα ανατραπεί ακόμα και αν το βάρος «πέφτει» έξω από τη βάση στήριξης.

Η επιτάχυνση της κίνησης είναι $\vec{g_x}$, όση θα ήταν και αν το σώμα ήταν υλικό σημείο.
Την μη ανατροπή θα μπορούσαμε να προβλέψουμε και με άλλο απλό συλλογισμό:



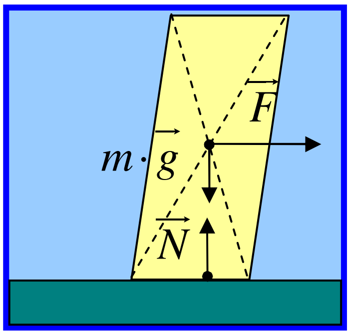
Σε λείο κεκλιμένο επίπεδο τοποθετούμε μια στοίβα λεία πλακάκια όπως δείχνει το σχήμα.

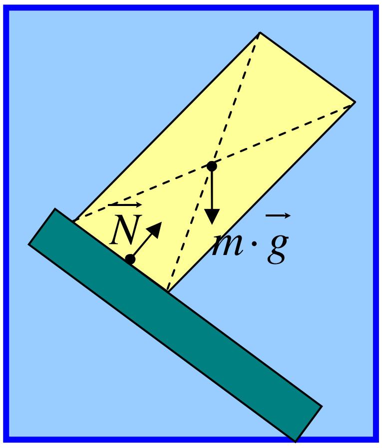
Τα πλακάκια θα κινηθούν όλα με ίδιες επιταχύνσεις $\vec{g_x}$, διότι κατά την x διεύθυνση δέχεται έκαστον δύναμη $m \cdot \vec{g_x}$.

Αν κολλήσουμε τα πλακάκια δεν θα υπάρξει αλλαγή.
Η κόλλα ουδεμία δύναμη θα ασκήσει διότι όλα κινούνται παρόμοια.
Το στερεό που θα προκύψει θα κινηθεί όπως και τα πλακάκια που το αποτελούν. Δεν θα ανατραπεί.

Ένα σώμα που στέκει.
Ο αρχικός συλλογισμός δεν αλλάζει διόλου.
Η $\vec{N}$ και το βάρος μοιράζονται τον ίδιο φορέα.
Αυτό ισχύει είτε ασκηθεί είτε όχι δύναμη στο κέντρο μάζας.

Η όποια δύναμη στο Κ.Μ. δεν θα ανατρέψει το σώμα, αν το επίπεδο είναι λείο. Το σώμα θα αποκτήσει την επιτάχυνση που θα αποκτούσε υλικό σημείο, δεχόμενο την δύναμη αυτήν.

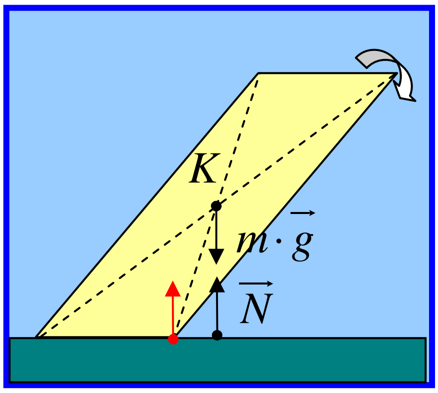


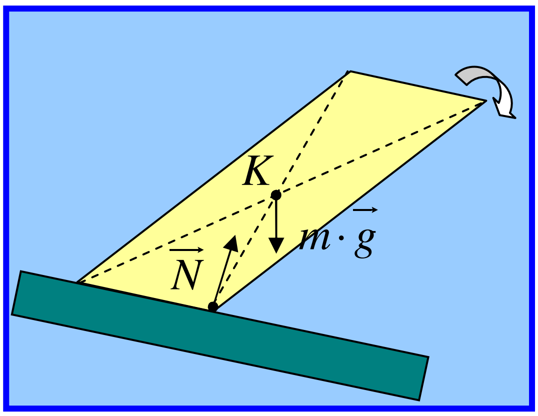


Βάζουμε το ίδιο σώμα σε λείο κεκλιμένο επίπεδο.
Οι συλλογισμοί μας ισχύουν και εδώ, όπως ακριβώς στην περίπτωση του κυλίνδρου.
Το σώμα δεν ανατρέπεται και κινείται με την επιτάχυνση που θα αποκτούσε ένα υλικό σημείο τιθέμενο στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο.

Εδώ είναι φανερό πως το βάρος πέφτει έξω από τη βάση και εν τούτοις δεν έχουμε ανατροπή.

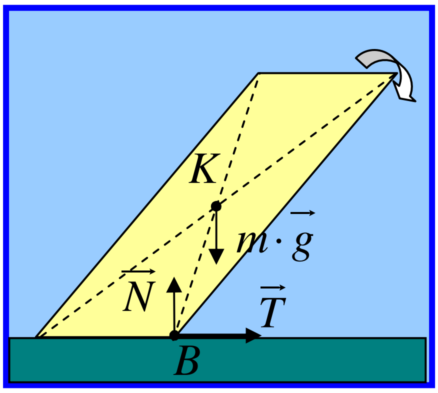
Ένα σώμα που δεν στέκει τοποθετείται σε λείο επίπεδο.
Για να μην πέσει θα έπρεπε η $\vec{N}$ να έχει την θέση που δείχνει το σχήμα (μαύρο). Δεν μπορεί όμως να βγει από τη βάση στήριξης . Έτσι το σώμα ανατρέπεται.
Η $\vec{N}$ έχει την θέση που δείχνει το κόκκινο διάνυσμα. Η ροπή της ως προς το Κ ανατρέπει το σώμα όπως δείχνει το σχήμα.





Τοποθετώντας το σώμα σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, η ανατροπή του διευκολύνεται.
Η $\vec{N}$ έχει ροπή ως προς το Κ και το ανατρέπει.
Λόγω της ανατροπής η δύναμη αυτή έχει την σημειωθείσα θέση. Και άλλη θέση όμως αν είχε (μέσα στη βάση) πάλι ανατροπή θα είχαμε.

Ένα σώμα που δεν στέκει τοποθετείται σε όχι λείο οριζόντιο επίπεδο.



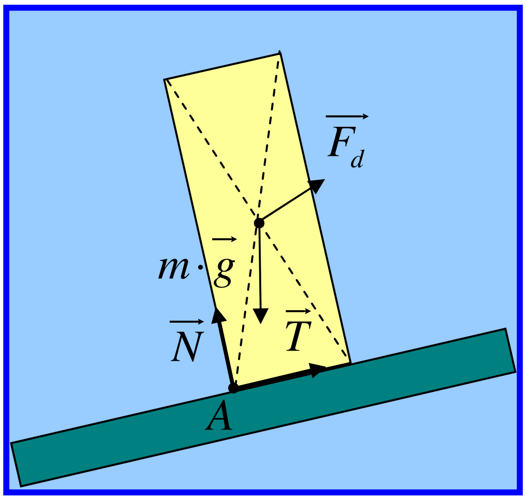
Αν ήταν λείο το επίπεδο, το Κ θα εκινείτο μόνο κατακόρυφα.
Κατέβασμα του Κ σημαίνει πως το Β θα πήγαινε αριστερά.
Η τριβή είναι πνεύμα αντιλογίας. Θέλει το Β να πάει αριστερά;
-Θα σε εμποδίσω.
Και παίρνει την φορά που βλέπουμε στο σχήμα. Προς τα δεξιά.

Τι γίνεται τώρα;
Το βάρος δεν έχει ροπή ως προς το Κ. Οι άλλες δύο έχουν ροπές αντίρροπες. Ποια θα νικήσει;

Ας υποθέσουμε πως δεν ανατρέπεται. Τότε η συνολική ροπή ως προς το Β θα είναι μηδενική. Άτοπο όμως διότι το βάρος δεν περνάει από το Β. Ανατρέπεται λοιπόν.

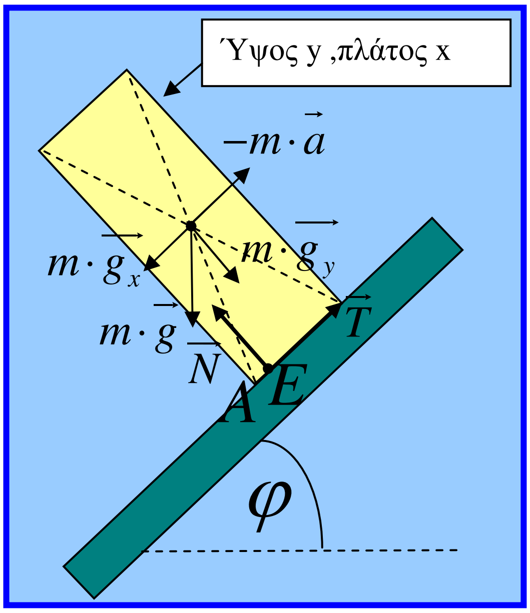
Ένας κύλινδρος σε κεκλιμένο μικρής κλίσης.
Το βάρος πέφτει μέσα στη βάση στήριξης.
Ρε δε πα να' χει τριβή. Ας έχει όποια φορά θέλει.
Αν υποθέσουμε ανατροπή περί το Α θα πρέπει η περί το Α ροπές να έχουν συνισταμένη προς τα έξω.
Όμως τόσο το βάρος όσο και η δύναμη d' Alembert (αν υπάρχει) δίνουν ροπές (ως προς το Α) προς τα μέσα.
Έτσι αποκλείεται η ανατροπή του.
Μένουν δύο περιπτώσεις:

- Να ισορροπήσει αν ο συντελεστής τριβής είναι μεγαλύτερος από την κλίση του κεκλιμένου.
- Να κατηφορίσει αν ο συντελεστής τριβής είναι μικρότερος από την κλίση του κεκλιμένου.



Στην δεύτερη περίπτωση υπολογίζεται η επιτάχυνση και από μαθητή της Α΄ Λυκείου.

Ένας κύλινδρος σε κεκλιμένο μεγάλης κλίσης με τριβή.



Το βάρος πέφτει έξω από τη βάση.

Περίπτωση πρώτη, να ισορροπεί.

Αποκλείεται, διότι η μεν τριβή έχει μηδενική ροπή ως προς το Α, αλλά βάρος και κάθετη αντίδραση μαζί, έχουν ροπή προς τα έξω.

Περίπτωση δεύτερη, να τσουλάει χωρίς να ανατρέπεται.
Κινείται με επιτάχυνση $a = g \cdot \eta\mu\varphi - \mu \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$
Η δύναμη d' Alembert είναι $-m \cdot \vec{a}$.
Ένας παρατηρητής βλέπει ισορροπία, δηλαδή τις ροπές ως προς το Α να έχουν συνισταμένη μηδέν. Ήτοι:

$$m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \cdot \frac{y}{2} + N \cdot (AE) = m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \frac{x}{2} + m \cdot a \cdot \frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \cdot \frac{y}{2} + m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (AE) = m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \frac{x}{2} + m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \cdot \frac{y}{2} - \mu \cdot m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \frac{y}{2}$$

$\Rightarrow (AE) = \frac{x}{2} - \mu \cdot \frac{y}{2}$

Όμως $0 \le (AE) \le x \Rightarrow 0 \le \frac{x}{2} - \mu \cdot \frac{y}{2} \le x \Rightarrow 0 \le x - \mu \cdot y \le 2x$

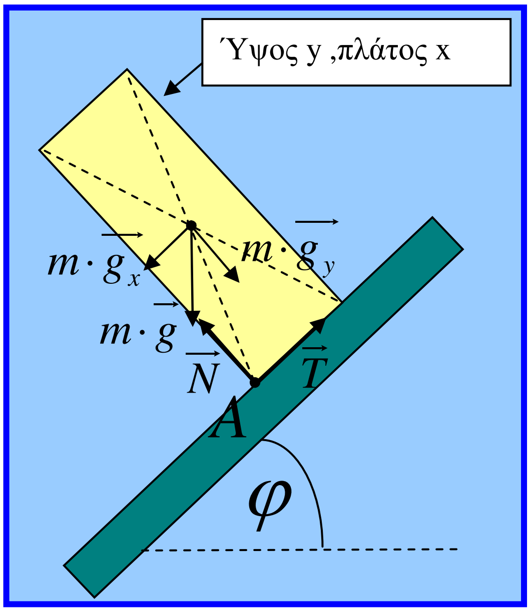
Οπότε έχουμε $0 \le x - \mu \cdot y \Rightarrow \mu \le \frac{x}{y}$ και $x - \mu \cdot y \le 2x \Rightarrow -\mu \cdot y \le x$, κάτι που ισχύει.

Εν κατακλείδι για να τσουλάει χωρίς να ανατρέπεται πρέπει $\mu \le \frac{x}{y}$

Περίπτωση τρίτη, να ανατρέπεται χωρίς να τσουλάει.
Τότε η κάθετη αντίδραση πάει στο Α.
Περιστροφή περί το Α σημαίνει:

$m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \cdot \frac{y}{2} > m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \frac{x}{2} \Rightarrow \varepsilon\phi\varphi > \frac{x}{y}$

Αυτή η συνθήκη είναι εξασφαλισμένη από το ότι το βάρος πέφτει έξω από τη βάση.



Όμως μη ολίσθηση σημαίνει πως η τριβή είναι στατική.
Δηλαδή ότι
$T \le \mu \cdot N \Rightarrow m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \le \mu \cdot m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \mu \ge \varepsilon\phi\varphi$.

Αν τώρα $\frac{x}{y} < \mu < \varepsilon\phi\varphi$ έχουμε την τέταρτη περίπτωση:

Και τσουλάει και ανατρέπεται.