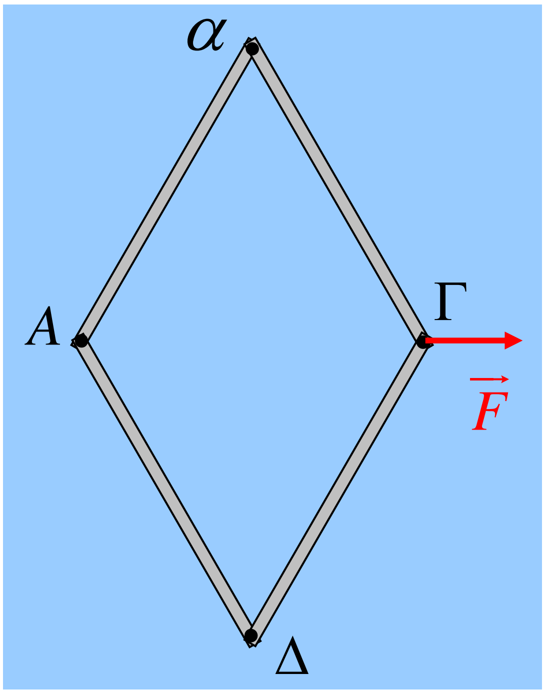
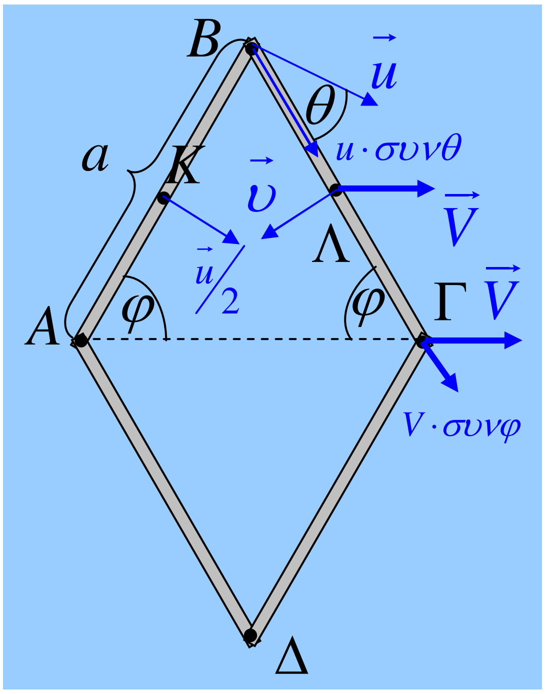
Οι 4 ράβδοι του Μανώλη.



Κλέβουμε το σύστημα ράβδων του Μανώλη Λαμπράκη.
«Τέσσερις όμοιες ράβδοι συνδέονται μέσω αρθρώσεων σχηματίζοντας ρόμβο που είναι τοποθετημένος σε οριζόντιο δάπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σημείο *Α* παραμένει σταθερό ενώ το *Γ μπορεί να κινείται»*

Θα στήσουμε προβληματάκια με αυτό.
Το Γ θα δέχεται σταθερή δύναμη.
Το Γ θα κινείται με σταθερή επιτάχυνση από κάποια δύναμη.
Τα Β και Δ είναι καταδικασμένα να κινούνται συμμετρικά ως προς την ΑΓ, προφανώς με ίδιες ταχύτητες.
Οι ράβδοι στρέφονται. Η συμμετρία επιβάλλει ίδιες γωνιακές ταχύτητες τουλάχιστον στις ΑΒ και ΑΔ και στις ΒΓ και ΒΔ.



Η κινηματική πρώτα:

Η ταχύτητα του σημείου Α είναι μηδέν.
Το Β διαγράφει κύκλο περί το Α και επομένως έχει ταχύτητα κάθετη στην ΑΒ.
Η ράβδος ΒΓ δεν είναι λαστιχένια. Έτσι τα Β και Γ έχουν ίδιες συνιστώσες ταχύτητας επ' αυτής. Δηλαδή:

$$u \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = V \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

Όμως $\theta = \frac{\pi}{2} - (\pi - 2\varphi) = 2\varphi - \frac{\pi}{2}$

Έτσι:

$$u \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = V \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\Rightarrow u \cdot \eta\mu 2\varphi = V \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow u \cdot 2\eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = V \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

Αν $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ τότε έχουμε:

$$u = \frac{V}{2\eta\mu\varphi}$$

Ίδια ταχύτητα έχει και το Δ.

Η ράβδος ΑΒ στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{u}{a} = \frac{V}{2a \cdot \eta\mu\varphi}$.

Η ράβδος ΒΓ σχηματίζει κάθε στιγμή γωνία με την ΑΓ, ίδια με αυτήν που σχηματίζει η ΑΒ.

Έτσι στρέφεται με ίδια γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{V}{2a \cdot \eta\mu\varphi}$.

Το μέσον Κ της ΑΒ κινείται με ταχύτητα $\frac{u}{2} = \frac{V}{4\eta\mu\varphi}$. Το ίδιο και το μέσον της ΑΔ.

Ένας παρατηρητής στο σημείο Γ βλέπει το Λ να στρέφεται αριστερόστροφα περί αυτόν με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, της οποίας το μέτρο είναι $\upsilon = \omega \cdot \frac{a}{2} = \frac{V}{4\eta\mu\varphi}$.

Η ταχύτητα του Λ βρίσκεται αν προσθέσουμε διανυσματικά και την ταχύτητα του παρατηρητή $\vec{V}$.

Έτσι $\upsilon_\Lambda = \sqrt{V^2 + \frac{V^2}{16\eta\mu^2\varphi} + 2V\cdot\frac{V}{4\eta\mu\varphi}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)} = \sqrt{V^2 + \frac{V^2}{16\eta\mu^2\varphi} - \frac{V^2}{2}} = \frac{V}{4}\sqrt{8+\frac{1}{\eta\mu^2\varphi}}$

Η κινητική ενέργεια:

Αν οι ράβδοι είναι ομογενείς και ισοπαχείς τότε οι ΑΒ και ΑΔ έχουν κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής περί το Α:

$$K_1 = 2\left(\frac{1}{2}\frac{m\cdot a^2}{3}\cdot\omega^2\right) = \frac{m\cdot a^2}{3}\cdot\frac{V^2}{4a^2\cdot\eta\mu^2\varphi} = \frac{m\cdot V^2}{12\cdot\eta\mu^2\varphi}$$

Οι ράβδοι ΒΓ και ΔΓ έχουν συνολικά κινητική ενέργεια:

$$K_2 = 2\left(\frac{1}{2}\frac{m\cdot a^2}{12}\cdot\omega^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_\Lambda^2\right) = \frac{m\cdot a^2}{12}\cdot\omega^2 + m\cdot\upsilon_\Lambda^2 = \frac{m\cdot V^2}{48\cdot\eta\mu^2\varphi} + \frac{m\cdot V^2}{16}8 + \frac{m\cdot V^2}{16\eta\mu^2\varphi}$$

$$\Rightarrow K_2 = \frac{m\cdot V^2}{16}\left(8+\frac{4}{3\eta\mu^2\varphi}\right)$$

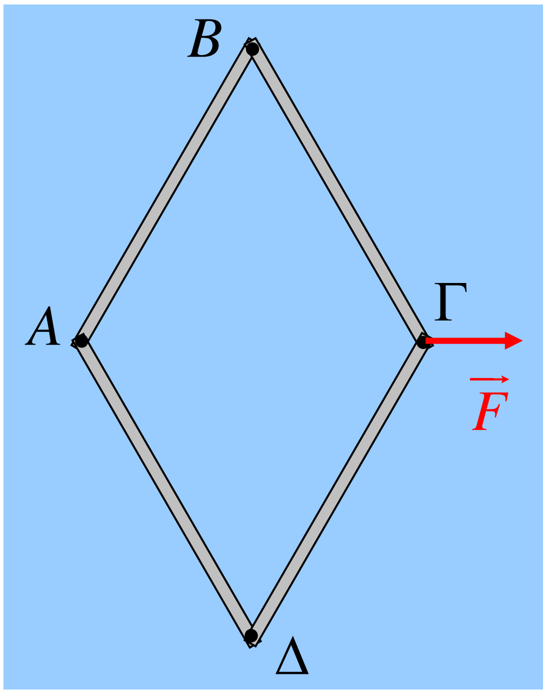
Έτσι η ολική κινητική ενέργεια είναι $K = K_1 + K_2 = \frac{m\cdot V^2}{12\cdot\eta\mu^2\varphi} + \frac{m\cdot V^2}{16}\left(8+\frac{4}{3\eta\mu^2\varphi}\right) = \frac{m\cdot V^2}{4}\left(2+\frac{2}{3\eta\mu^2\varphi}\right)$,

Αυτό ήτανε όλη η φασαρία.

Τώρα μπορούμε να στήνουμε ευφάνταστες ασκήσεις.

Η πρώτη:

Τραβάμε με σταθερή δύναμη $\vec{F}$, έτσι ώστε ενώ αρχικά όλες οι ράβδοι είναι στην ίδια ευθεία, να σχηματισθεί τετράγωνο. Βρείτε την ταχύτητα του σημείου Γ.



Λύση απλούστατη:

Όταν θα σχηματισθεί τετράγωνο, η δύναμη θα έχει μετατοπισθεί κατά μια διαγώνιο $a\sqrt{2}$ και $\varphi = 45^o$.

Το έργο της δύναμης θα γίνει κινητική ενέργεια. Δηλαδή:

$$F\cdot a\sqrt{2} = \frac{m\cdot V^2}{4}\left(2+\frac{2}{3\eta\mu^2 45^o}\right) \Rightarrow F\cdot a\sqrt{2} = \frac{5m\cdot V^2}{6}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{6F\cdot a\sqrt{2}}{5m}}$$

Αν θέλετε βγάζουμε και την γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega = \frac{V}{2a\cdot\eta\mu\varphi} = \frac{\sqrt{\frac{6F\cdot a\sqrt{2}}{5m}}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3F\sqrt{2}}{5a\cdot m}}$$

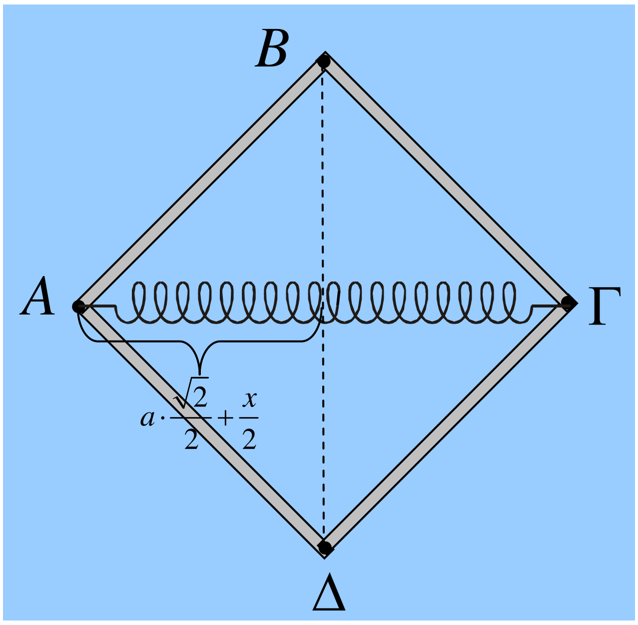
Η δεύτερη:

Ποια η διαφορά των δυνάμεων ώστε να κινείται με σταθερή επιτάχυνση;

Μια λύση:

Αν το Γ κινείται με επιτάχυνση γ τότε το κέντρο μάζας του συστήματος (το κέντρο του ρόμβου) κινείται με επιτάχυνση $\gamma/2$. Έτσι $\Delta F = 2m\cdot\gamma$.

Η τρίτη:



Όταν η διάταξη του Μανώλη έχει σχήμα τετραγώνου, το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.
Το σημείο Α είναι σταθερά συνδεδεμένο.
Αν εκτρέψουμε το Γ κατά μικρή απόσταση, σε σχέση με την ΑΓ , και το αφήσουμε θα εκτελέσει ταλάντωση.
Θα είναι αρμονική;
Αν ναι ποια συχνότητα έχει;

Μια λύση:
Σε κάποια θέση x έχει κινητική ενέργεια:

$$K=\frac{m\cdot V^2}{4}\left(2+\frac{2}{3\eta\mu^2\varphi}\right)$$

Στην θέση αυτήν η γωνία είναι σχεδόν 45° και η κινητική ενέργεια σχεδόν $K=\frac{5m\cdot V^2}{6}$

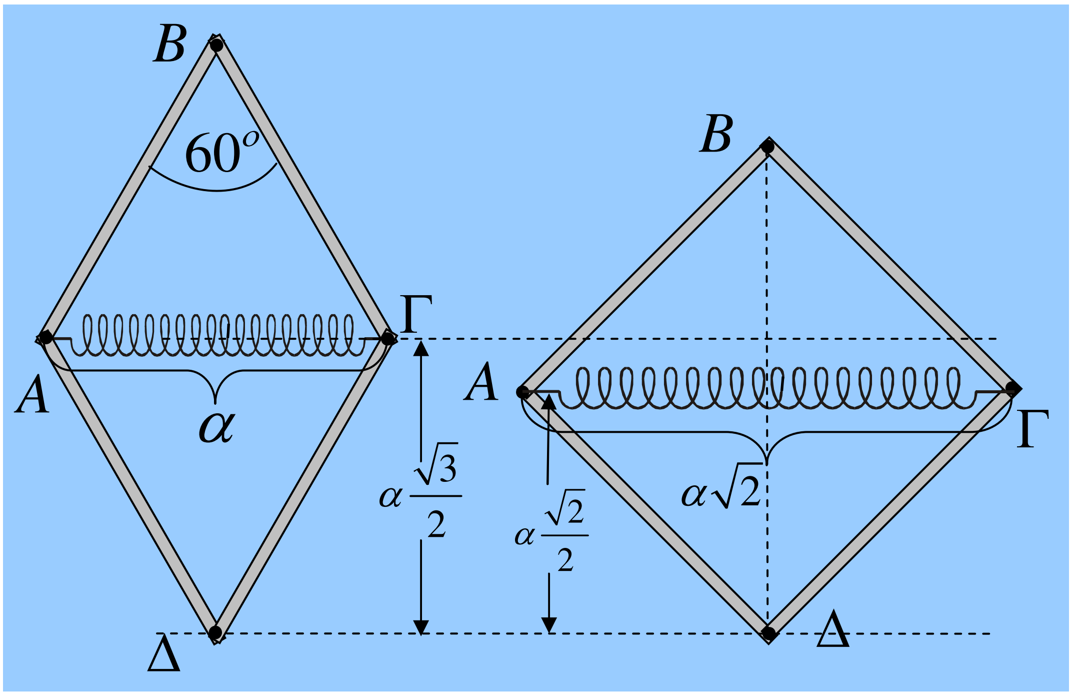
Η δυναμική του ενέργεια είναι $U=\frac{1}{2}k\cdot x^2$.

Η ολική του ενέργεια παραμένει σταθερή, δηλαδή $\frac{dE}{dt}=0\Rightarrow\frac{dU}{dt}+\frac{dK}{dt}=0\Rightarrow k\cdot x\cdot V+2m\cdot V\cdot\frac{dV}{dt}\cdot\frac{5}{6}=0$

$$\Rightarrow\Rightarrow k\cdot x+\frac{5}{3}m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

Το σημείο Γ επομένως εκτελεί κατά προσέγγισιν αρμονική ταλάντωση συχνότητας $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{5m}}$.

Η τέταρτη:



Τώρα στερεώνουμε το Δ στο έδαφος.
Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος στην αριστερή θέση.

Αφήνεται ελεύθερο και κάποια στιγμή έχει σχήμα τετραγώνου.
Το ελατήριο είναι μαλακό και θα του επιτρέψει να φτάσει στην θέση αυτήν.
Ποια είναι η ταχύτητα του Β τότε;

Μια λύση:

Το κέντρο μάζας κατέβηκε κατά $a\frac{\sqrt{3}}{2}-a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Η δυναμική λόγω βάρους μειώθηκε κατά $m\cdot g\cdot\frac{a}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$.

Η δυναμική του ελατηρίου έγινε $\frac{1}{2}k\cdot\left(a\sqrt{2}-a\right)^2=\frac{1}{2}k\cdot a^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

Συνολικά η δυναμική μειώθηκε κατά:

$$m\cdot g\cdot\frac{a}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}k\cdot a^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

Η μείωση αυτή έγινε κινητική ενέργεια:

$$K=\frac{5}{6}m\cdot V^2$$

Φυσικά

$$\frac{5}{6}m\cdot V^2=m\cdot g\cdot\frac{a}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}k\cdot a^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

$$\Rightarrow V=\sqrt{g\cdot\frac{3a}{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\frac{3}{5}\frac{k}{m}\cdot a^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$$

Αντιλαμβανόμαστε πως δεκάδες ασκήσεις μπορεί να δώσει η κατασκευή του Μανώλη.
Όρεξη να έχεις.