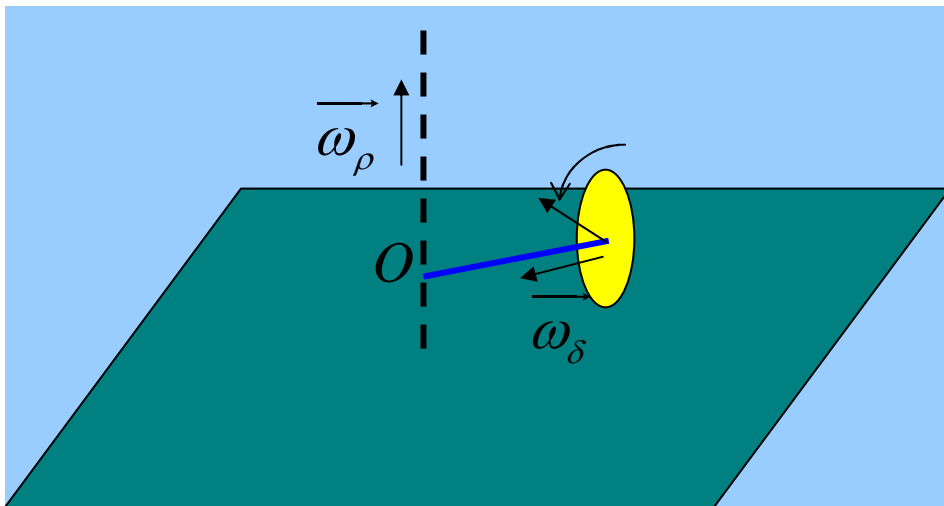


Πόση είναι η κινητική ενέργεια;



Ο δίσκος του σχήματος έχει ακτίνα R . Ο μπλε άξονας έχει μήκος L και παραμένει συνεχώς οριζόντιος καθώς στρέφεται περί το O . Είναι αβαρής. Το κέντρο μάζας του δίσκου εκτελεί κυκλική κίνηση, σε οριζόντιο επίπεδο, ακτίνας L . Η ταχύτητα του σημείου αυτού είναι σταθερή στην τιμή v . Ποια είναι η σχέση των δύο γωνιακών ταχυτήτων, της περιστροφής του άξονα και αυτής του δίσκου; Πόση είναι η κινητική ενέργεια του δίσκου;

Απάντηση:

Οι γωνιακές ταχύτητες:

$$\omega_\rho = \frac{v}{L} \quad \text{και} \quad \omega_\delta = \frac{v}{R}, \quad \text{οπότε} \quad \omega_\rho = \omega_\delta \cdot \frac{R}{L}$$

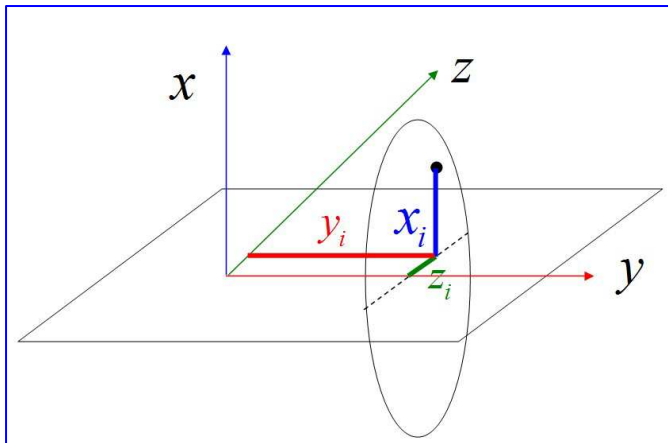
Η κινητική ενέργεια:

Είναι πάρα πολύ απλό το να την πατήσουμε και να πούμε ότι η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega_\delta^2 = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \frac{m \cdot R^2}{2} \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4} m \cdot v^2$$

Αυτό είναι καλή προσέγγιση αν $L \gg R$.

Θα μπορούσαμε να δώσουμε μια ακριβή λύση με χρήση του τανυστή αδράνειας.



$$\omega_x = \frac{v}{L}, \quad \omega_y = \frac{v}{R}, \quad \omega_z = 0$$

$$K = \frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + 2I_{xy} \omega_x \omega_y$$

$$I_{xx} = \frac{mR^2}{4} + mL^2 \quad \text{και} \quad I_{yy} = \frac{mR^2}{2}$$

$$I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i = -\sum_i m_i x_i L = -L \sum_i m_i x_i = 0$$

Διότι ο άξονας περνάει από το κέντρο μάζας.

$$\text{Έτσι: } K = \frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{mR^2}{4} + mL^2 \right) \frac{v^2}{L^2} + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \frac{v^2}{R^2} = \left(\frac{mR^2}{8L^2} + \frac{3}{4} m \right) v^2$$

Βλέπουμε ότι η κινητική ενέργεια είναι μεγαλύτερη αυτής που υπολογίσαμε κατά τον όρο $\frac{mR^2}{8L^2} \cdot v^2$.

Ο όρος είναι σημαντικός αν τα L και R είναι συγκρίσιμα.

Θα μπορούσαμε να εξηγήσουμε το γιατί σε έναν μαθητή με απλά λόγια, χωρίς δηλαδή την χρήση του τανυστή αδράνειας;

Θα μπορούσαμε να βρίσκαμε μια λύση που να καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα αλλά θα είναι απλή και κατανοητή;

Γιατί, για να είμαι ειλικρινής, έβγαλα κάτι χωρίς να καταλάβω τι έκανα. Έχασα την ουσία του φαινομένου, χάριν του υπολογισμού.